A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A   Z   T O P O L O G I Ą

WPPT 4r., sem. letni
KOLOKWIUM 2
GRUPA A

Wrocław, 10 czerwca 2013

ZADANIE 1A (3p)
Podać takie założenia twierdzenia o rozdzielaniu zbiorów A i B w przestrzeni liniowej V, by prawdziwa była teza:
istnieje funkcjonał liniowy F na V taki, że $\sup_{a\in A} F(a) < \inf_{b\in B} F(b)$.

ZADANIE 2A (4p)
Niech $T_f = \int f dE$, gdzie E jest ustaloną miarą spektralną. Udowodnić, że jeżeli f i g są rzeczywistymi funkcjami prostymi, to $T_{fg} = T_f \circ T_g$.

ZADANIE 3A

(a) (1p) Podać definicję operatora normalnego.

(b) (3p) Udowodnić, że operator T określony na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ jest normalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$||Tx|| = ||T^*x|| \qquad \forall\ x \in \mathcal{H}.$$

ZADANIE 4A (5p)
Niech $K = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ i niech $\alpha \in K$ nie będzie pierwiastkiem z jedności. Oznaczmy przez μ unormowaną miarę Lebesgue'a na K. Znaleźć widmo punktowe (czyli zbiór wartości własnych) operatora T, gdy T jest zdefiniowany na $L^2(\mu)$ wzorem

$$Tf(z) = f(\alpha z).$$

Wskazówka: Rozważyć bazę $\{z^n\colon n \in \mathbb{Z}\}$ przestrzeni $L^2(\mu)$.

ZADANIE 5A

(a) (2p) Podać definicję współczynników Fouriera–Stjeltjesa nieujemnej miary skończonej na $K = \{z\colon |z| = 1\}$.

(b) (2p) Podać definicję $*$-słabej zbieżności ciągu miar i jej charakteryzację w terminach współczynników Fouriera–Stjeltjesa.

Powodzenia!

A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A   Z   T O P O L O G I Ą

WPPT 4r., sem. letni
KOLOKWIUM 2
GRUPA B

Wrocław, 10 czerwca 2013

ZADANIE 1B (3p)
Sformułować tezę twierdzenia o rozdzielaniu zbiorów wypukłych A, B w przestrzeni liniowo-topologicznej V, gdy jeden ze zbiorów jest zbiorem otwartym.

ZADANIE 2B (4p)
Niech $T_f = \int f dE$, gdzie E jest miarą spektralną. Uzasadnić, że jeżeli f jest funkcją prostą (być może o zespolonych współczynnikach), to $T_{\bar{f}}$ jest operatorem sprzężonym do T_f.

ZADANIE 3B

(a) (1p) Podać definicję operatora unitarnego.

(b) (3p) Udowodnić, że operator U określony na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ jest unitarny wtedy i tylko wtedy, gdy jest izomorfizmem przestrzeni Hilberta (tzn. jest liniowy, odwracalny i jest izometrią).

ZADANIE 4B (5p)
Znaleźć widmo punktowe (czyli zbiór wartości własnych) operatora T zdefiniowanego na l^2 wzorem

$$T(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...).$$

Uwaga: Zadanie 5 ma dwie wersje. Należy je wybrać zgodnie z realizowaną specjalizacją.
ZADANIE 5B

(a) (1p) Podać definicję widma operatora T.

(b) (3p) Podać definicję miary spektralnej na przestrzeni mierzalnej (Ω, Σ).

Powodzenia!